Taller básico de Geometría (22/11/19):

Resultados básicos de Geometría plana: se suponen conocidos las semejanzas de triángulos y el teorema de Thales:

Dos triángulos son semejantes si tienen los ángulos correspondientes iguales o si sus lados son proporcionales entre sí.

El teorema de Tales afirma que si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado.

Trigonometría básica: definiciones de seno, coseno y tangente de un ángulo. Propiedades básicas

El triángulo ABC es un triángulo rectángulo en C; lo usaremos para definir las razones seno, coseno y tangente, del ángulo correspondiente al vértice A:

El seno (abreviado como *sen*, o *sin* por llamarse "sĭnus" en latín) es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa.

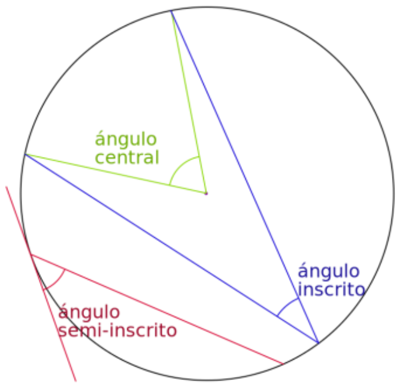
El coseno (abreviado como *cos*) es la razón entre el cateto adyacente o contiguo al ángulo y la hipotenusa.

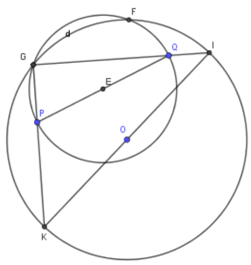
La tangente (abreviado como *tan* o *tg*) es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto adyacente.

$$\sin A = \frac{BC}{AB},\ \cos A = \frac{AC}{AB},\ \tan A = \frac{BC}{AC}$$

Del teorema de Pitágoras se obtiene que $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, sin 45º = cos 45º $=\frac{\sqrt{2}}{2}$, sin 30º = cos 60º = ½, sin 60º = cos 30º = $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Razones trigonométricas de 90º, 120º, 135º, 150º, …

Teorema del ángulo inscrito (o semi-inscrito).- *Un ángulo inscrito (o semi-inscrito) en un círculo mide la mitad del arco que abarca (o ángulo central).*





Demostración: Hacer primero el caso particular de que uno de los lados pase por el centro de la circunferencia.

Teorema del ángulo interior.- *Un ángulo interior en un círculo mide la semisuma de los dos arcos que abarca.*

Teorema del ángulo exterior.- *Un ángulo exterior de un círculo mide la semidiferencia de los dos arcos que abarca.*

Casos de ángulos tangentes.

Mediatriz de un triángulo. Existencia del circuncentro. Caso del triángulo rectángulo.

Problema Fase Local OME 2008 (nº 5). *Dada una circunferencia y dos puntos P y Q en su interior, inscribir un triángulo rectángulo cuyos catetos pasen por P y Q respectivamente. ¿Para qué posiciones de P y Q el problema no tiene solución?*

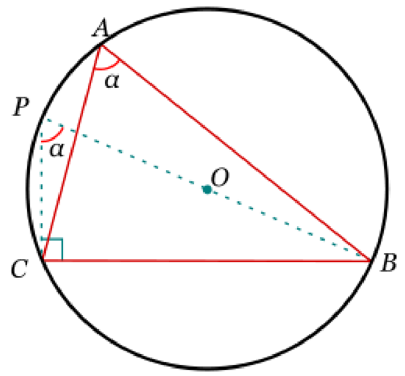
(Ver figura anterior) Si *E* es el punto medio de *PQ, O* el centro de la circunferencia y *r* su radio, no existe solución si *OE +PQ/2 < r*.

Teorema de la altura.- *En un triángulo rectángulo la altura sobre la hipotenusa es media proporcional con las partes en las que divide a ésta.*

Demostración por semejanza de triángulos

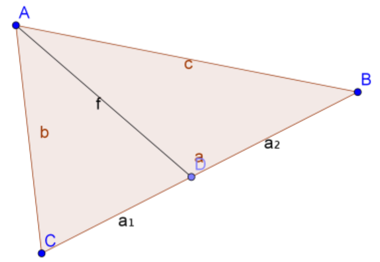
Teorema del Seno.- *En todo triángulo ABC se verifica que los lados son proporcionales a los senos de los ángulos correspondientes. La proporción es el diámetro de la circunferencia circunscrita*: $\dfrac{a}{senA}=\dfrac{b}{senB}=\dfrac{c}{senC}=2R$

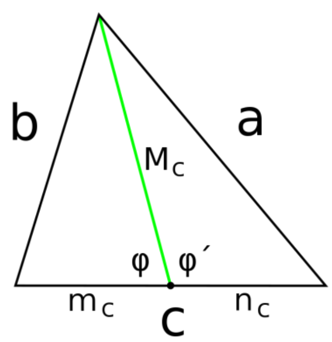
Demostración comparando la definición de seno de dos de los ángulos, o bien, por el teorema del ángulo inscrito, el ángulo en P coincide con el ángulo en A



Teorema de la bisectriz (interior).- *La bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los lados del ángulo:*

$$\frac{a_1}{b}=\frac{a_2}{c}$$



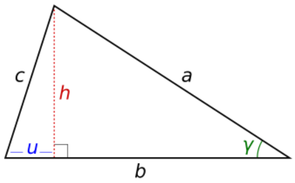


Demostración: aplicar el teorema del seno a los triángulos *ADC, ADB y ABC*.

Teorema del Coseno.- *En todo triángulo ABC de lados a, b, c se verifica que:*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\hat{C}$$

Demostración: aplicar la definición de coseno de C y el teorema de Pitágoras



Teorema de la mediana (o de Apolonio).- *En un triángulo ABC de lados a, b, c se traza la mediana desde C, de longitud M. Se verifica que:*

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2M^2$$

Demostración (ver figura anterior) Aplicar la fórmula del coseno a los ángulos φ y φ'.

Movimientos del plano. Homotecias.

Recordar los tipos de movimientos: traslaciones, giros, simetrías y simetrías con deslizamiento, con sus elementos característicos. Recordar las homotecias, centro y razón.

Bisectrices (interiores) de un triángulo. Existencia del incentro.

La simetría de eje una bisectriz del triángulo transforma un lado en el otro. Luego todo punto de la bisectriz equidista de los dos lados que la definen. El punto de corte de dos bisectrices equidista de los tres lados, luego está en la tercera bisectriz.

Problema nº 3 Fase local 2006. *En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior CD. Se sabe que el centro del círculo inscrito en el triángulo BCD coincide con el centro del círculo circunscrito del triángulo ABC. Calcular los ángulos del triángulo ABC.*

Problema nº 2 Fase Local OME 2008 *En un cuadrilátero convexo se trazan las perpendiculares desde cada vértice a la diagonal que no pasa por él. Demuestra que los cuatro puntos de intersección de cada perpendicular con su correspondiente diagonal forman un cuadrilátero semejante al dado.*

Alturas de un triángulo. Existencia del ortocentro. Recta de Euler.

Fórmulas del área S de un triángulo, conocidos:

1. Base, *b*, y altura *h: S = ½ bh*
2. Dos lados *a,b* y el ángulo $\hat{C}$ que abarcan: *S=½ ab sin* $\hat{C}$

Problema Fase Local OME 2019 (nº 3) (ligeramente adaptado). *Sea ABC un triángulo equilátero de lado 6. Un rayo de luz parte de A, rebota en el lado BC, en el punto D, y corta al lado AC en su punto medio E. Calcular el área del triángulo*

3. Lados *a,b,c* (fórmula de Herón). Si $p=(a+b+c)/2$, y R es el circunradio:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R}$$

4. Semiperímetro e inradio r: $S=pr$

Problema Fase Local OME 2019 (nº 4) (ligeramente adaptado). *Sea $p \geq 3$ un número entero y consideremos el triángulo rectángulo de cateto mayor p^2-1 y cateto menor $2p$. Inscribimos en el triánguloun semicírculo cuyo diámetro se apoya en el cateto mayor y es tangente a la hipotenusa. Calcule el radio r del semicírculo, en función de p. Determine los valores de p para los que r es también entero.*

Coordenadas de los vértices (a_1,a_2), (b_1,b_2), (c_1,c_2),

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$